ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS 104 (1998), 261–283

RANG DES SYSTÈMES DYNAMIQUES GAUSSIENS

PAR

THIERRY DE LA RUE

Analyse et Modèles Stochastiques, URA CNRS 1378
Université de Rouen, Mathématiques, Site Colbert, F76821 Mont-Saint-Aignan Cedex, France
e-mail: delarue@univ-rouen.fr

ABSTRACT

Although some Gaussian dynamical systems, called "Gaussian–Kronecker", share with rank one systems some unusual properties, we show in this work that a Gaussian dynamical system is never of finite rank. In fact, such a system can't even be of local rank one.

1. Introduction

Les systèmes dynamiques étudiés ici sont de la forme $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$, où T est une transformation mesurable inversible de l'espace de Lebesgue $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

1.1 TOURS DE ROKHLIN, RANG UN ET APPARENTÉS. Si $\mathcal{P} = \{P_u, u \in \mathcal{U}\}$ est une partition finie de Ω en ensembles mesurables, on définit pour tout $\omega \in \Omega$ et tout couple d'entiers (i,j) avec $i < j$ le mot de longueur $j-i$ sur l'alphabet $\mathcal{U}$

$$W|_i^j(\omega, T, \mathcal{P}) \stackrel{\text{déf}}{=} u_i u_{i+1} \cdots u_{j-1},$$

où pour tout k, $T^k\omega \in P_{u_k}$.

Si $W = u_1 \cdots u_l$ et $W' = u'_1 \cdots u'_l$ sont deux mots de même longueur l sur l'alphabet $\mathcal{U}$, la distance $\overline{d}$ entre W et W' est définie par

$$\overline{d}(W, W') \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{l} \# \left\{ j \in \{1, \ldots, l\} / u_j \neq u'_j \right\}.$$

Une **tour de Rokhlin** est un couple $\mathcal{T} = (h, F)$, où $h \geq 1$ est un entier et $F \in \mathcal{A}$ est tel que $F, TF, \ldots, T^{h-1}F$ soient deux à deux disjoints. h est la

Received February 25, 1996

hauteur de la tour, et F sa **base**. Chaque $T^kF (0 \le k \le h-1)$ est un **étage** de $\mathcal{T}$. On désignera parfois abusivement par le même symbole $\mathcal{T}$ la réunion de tous les étages de la tour. La mesure de la tour est donc $\mu(\mathcal{T}) = h\mu(F)$.

Pour $\varepsilon > 0$, on dira que la tour de Rokhlin(h, F) est **ε-fine pour la partition** $\mathcal{P}$ si pour tous ω et ω' dans F, on a

$$\bar{d}\left(W|_0^h(\omega, T, \mathcal{P}), W|_0^h(\omega', T, \mathcal{P})\right) \le \varepsilon.$$

Le système dynamique $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$ est dit **de rang un** si pour toute partition finie $\mathcal{P}$ de Ω et tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une tour de Rokhlin$\mathcal{T}$, ε-fine pour $\mathcal{P}$, et de mesure $\mu(\mathcal{T}) \ge 1 - \varepsilon$.

En général, on dit que le rang du système est **au plus** r si pour toute partition finie $\mathcal{P}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe r tours de Rokhlin $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_r$ ε-fines pour $\mathcal{P}$, deux à deux disjointes et telles que

$$\sum_{j=1}^{r} \mu(\mathcal{T}_j) \ge 1 - \varepsilon.$$

Bien sûr, le système est dit **de rang** r s'il est de rang au plus r et non de rang au plus $r - 1$.

Enfin, le système est dit **de rang un local** s'il existe $\tau \in]0, 1[$ tel que, pour toute partition finie $\mathcal{P}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une tour de Rokhlin ε-fine pour $\mathcal{P}$ et de mesure supérieure ou égale à τ.

Les implications suivantes sont des conséquences directes des définitions :

$$\text{rang un} \Longrightarrow \text{rang fini} \Longrightarrow \text{rang un local.}$$

1.2 DES PARTITIONS FINIES AUX PROCESSUS COMPLEXES. Soit $\mathcal{Y} = (Y_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ un processus complexe défini sur Ω, avec $Y_0 \in L^4(\mu)$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $Y_p = Y_0 \circ T^p$. Pour tout couple d'entiers (i, j) avec $i < j$, on définit le processus à valeurs dans $\mathbb{C}^{j-i}$

$$\mathcal{Y}|_i^j \stackrel{\text{déf}}{=} (Y_i, Y_{i+1}, \ldots, Y_{j-1}).$$

Sauf indication contraire, pour tout entier $p \ge 1$, la norme d'un vecteur $y = (y_1, \ldots, y_p)$ de $\mathbb{C}^p$ sera toujours calculée comme suit :

$$\|y\| \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{\frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} |y_j|^2}.$$

Une tour de Rokhlin $\mathcal{T} = (h, F)$ sera dite **ε-fine pour $\mathcal{Y}$** si pour tous ω et ω' dans F, on a

$$\left\| \mathcal{Y}|_0^h(\omega) - \mathcal{Y}|_0^h(\omega') \right\| \leq \varepsilon.$$

On vérifie facilement que si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$ est de rang un, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver une tour de Rokhlin ε-fine pour $\mathcal{Y}$ et de mesure au moins égale à $1 - \varepsilon$. Réciproquement, s'il existe des tours de Rokhlin arbitrairement fines pour $\mathcal{Y}$, et de mesure arbitrairement proche de 1, alors le facteur de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$ engendré par $\mathcal{Y}$ est de rang un.

Le soin est laissé au lecteur d'énoncer l'analogue de ces remarques dans le cas du rang fini et du rang un local.

1.3 QUELQUES PROPRIÉTÉS REMARQUABLES DES SYSTÈMES DE RANG UN. Les systèmes de rang un sont toujours ergodiques et d'entropie nulle ; en général, comme le montre J.L. King dans [8], un système de rang r possède au plus r composantes ergodiques, et pour que $h(T) = 0$, il suffit d'après [2] que T soit ergodique et de rang un local.

Plus inhabituel, les systèmes de rang un ont spectre simple L^p pour tout $p \in [1, +\infty[$: il existe $f \in L^p$ tel que le sous-espace engendré par les $f \circ T^p, p \in \mathbb{Z}$, soit dense dans L^p (voir [3]). Ils vérifient aussi le "Weak Closure Theorem", démontré par J.L. King dans [7] : toute transformation S de Ω préservant μ et commutant avec T est une limite faible de puissances de T.

Enfin, autre propriété qui s'étend aux systèmes ergodiques et de rang un local ([2]), les systèmes de rang un sont lâchement Bernoulli (dans le cas de l'entropie nulle, cela signifie qu'ils sont équivalents au sens de Kakutani aux rotations irrationnelles).

1.4 LES SYSTÈMES DYNAMIQUES GAUSSIENS. Le système $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$ est appelé **système dynamique gaussien** lorsqu'il existe un processus gaussien réel centré $\mathcal{X} = (X_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ engendrant $\mathcal{A}$, avec, pour tout entier p, $X_p = X_0 \circ T^p$. Rappelons que la loi d'un tel processus, dont découlent toutes les propriétés du système dynamique qu'il engendre, est déterminée par la donnée de ses covariances ; celles-ci peuvent toujours s'écrire sous la forme

$$\mathbb{E}[X_p X_q] = \int_{[-\pi, \pi]} e^{i(q-p)t} d\gamma(t),$$

où γ est une mesure finie symétrique sur $[-\pi, \pi]$ appelée **mesure spectrale du système**.

Un cas particulièrement intéressant est celui où la mesure spectrale γ est diffuse, et concentrée sur $K \cup (-K)$, où K est un **ensemble de Kronecker** dans $[0, \pi]$. (Pour la définition d'un ensemble de Kronecker, qui a peu d'importance ici, et la construction de telles mesures spectrales, on peut par exemple consulter [1].) Un tel système dynamique gaussien sera appelé un **gaussien-Kronecker**. Ces systèmes partagent avec les systèmes de rang un les quatre premières propriétés énoncées en 1.3 : l'ergodicité, car leur mesure spectrale est diffuse, l'entropie nulle, car un ensemble de Kronecker est toujours de mesure de Lebesgue nulle, le spectre simple L^p pour $1 \leq p < +\infty$ et le "Weak-Closure Theorem" (voir [1], [11], [6] et [14]). De plus, on construit dans [13] un gaussien-Kronecker qui est lâchement Bernoulli, la question de savoir si tous le sont restant ouverte à ce jour. Enfin, les gaussiens-Kronecker partagent avec les systèmes à spectre discret, qui sont de rang un, une étonnante propriété de stabilité spectrale démontrée dans [5] : dès qu'un système est spectralement isomorphe à un gaussien-Kronecker, il lui est métriquement isomorphe.

Devant tant de points communs, une question bien naturelle consiste à se demander s'il existe des gaussiens-Kronecker de rang un. S. Ferenczi ([3]) a cru construire un tel système, de l'existence duquel il déduit notamment avec M. Lemanczyk que le rang n'est pas un invariant spectral ([4]). Malheureusement, une erreur dans son travail fait que l'existence d'un système dynamique gaussien de rang un est restée jusqu'à maintenant une question ouverte. Le but principal de cet article est de répondre négativement à cette question, en démontrant le théorème suivant.

THÉORÈME 1.1: *Un système dynamique gaussien n'est jamais de rang un local.*

Une conséquence directe de ce théorème est bien sûr que le rang d'un système dynamique gaussien est toujours infini.

1.5 ERGODICITÉ ET RANG UN LOCAL POUR LES SYSTÈMES GAUSSIENS. On va montrer tout d'abord que s'il existait un système gaussien de rang un local, alors celui-ci serait ergodique, c'est-à-dire à mesure spectrale diffuse. En effet, notons γ la mesure spectrale du processus $\mathcal{X} = (X_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ engendrant le système dynamique gaussien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$, et supposons qu'il existe $\alpha \in [-\pi, \pi]$ tel que $\gamma(\{\alpha\}) > 0$. Alors il existe dans le sous-espace gaussien complexe de $L^2(\mu)$ engendré par $\mathcal{X}$ une variable aléatoire $Y \neq 0$, de moyenne nulle, telle que

$$Y \circ T = e^{i\alpha} Y. \tag{1}$$

Considérons le processus $\mathcal{R} = (R_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad R_p \overset{\text{déf}}{=} |Y| \circ T^p.$$

D'après (1), on a pour tout entier p, $R_p = R_0 = |Y|$ μ-presque sûrement. Si on suppose le système de rang un local, on peut alors trouver des tours de Rokhlin arbitrairement fines pour $\mathcal{R}$, dont la mesure est toujours supérieure à un réel τ donné dans $]0,1[$. On en déduit facilement que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel positif r_ε tel que

$$\mu\Big(\Big||Y| - r_\varepsilon\Big| \leq \varepsilon\Big) \geq \tau - \varepsilon,$$

ce qui est clairement impossible dans le cas où Y est une variable gaussienne centrée de variance non nulle.

1.6 Système gaussien et mouvement brownien. On utilisera dans la suite la représentation d'un système dynamique gaussien comme une transformation géométrique de la trajectoire brownienne complexe, développée dans [12]. Rappelons rapidement quelques résultats concernant cette représentation.

On note $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, \mu_0)$l'espace canonique du mouvement brownien complexe issu de 0, sur l'intervalle de temps [0,1] :

- Ω_0 est l'espace des applications continues de [0,1] dans $\mathbb{C}$, qui s'annulent en $t = 0$,
- la probabilité μ_0 est la mesure de Wiener sur Ω,
- $\mathcal{A}_0$ est la tribu borélienne de Ω_0, complétée pour μ_0.

Pour $\omega \in \Omega_0$ et $0 \leq t \leq 1$, on note $B_t(\omega)$ la position de la trajectoire ω à l'instant t.

Si σ est une mesure de probabilité sur $[0,\pi]$ concentrée en un nombre fini de points $\alpha_1 < \cdots < \alpha_p$, de masses respectives $m_1, \ldots, m_p$, on définit une transformation T_σ de Ω_0, préservant la mesure μ_0, de la façon suivante : posons, pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}, t_k \overset{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^k m_j$ et $t_0 \overset{\text{déf}}{=} 0$; on découpe la trajectoire ω en p morceaux, correspondant aux intervalles de temps $[t_{k-1}, t_k]$ $(1 \leq k \leq p)$, puis on effectue une rotation de l'angle α_k sur le k-ième morceau. $T_\sigma\omega$ est la trajectoire obtenue en recollant bout à bout les nouveaux morceaux. On a ainsi, pour $t \in [t_j, t_{j+1}]$,

$$B_t \circ T_\sigma = \sum_{k=1}^{j} e^{i\alpha_k} \left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right) + e^{i\alpha_{j+1}} \left(B_t - B_{t_j}\right). \tag{2}$$

Si σ est maintenant une mesure de probabilité diffuse sur $[0,\pi]$, on peut définir T_σ comme la limite d'une suite transformations T_{σ_n}, où les mesures σ_n sont concentrées en un nombre fini de points et convergent suffisamment bien vers σ. Pour tout $t \in [0,1]$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} B_t \circ T_\sigma^p &= \int_0^t e^{ip\psi(s)} dB_s, \\ \text{où} \quad \psi(s) &\stackrel{\text{déf}}{=} \inf\left\{x \in [0,\pi] \,/\, \sigma\left([0,x]\right) \geq s\right\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Le système $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, \mu_0, T_\sigma)$ obtenu est alors un système dynamique gaussien de mesure spectrale γ, où γ est la mesure de probabilité symétrique sur $[-\pi,\pi]$ définie par

$$\gamma(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}\Big(\sigma\Big(A \cap [0,\pi]\Big) + \sigma\Big(-A \cap [0,\pi]\Big)\Big), \tag{4}$$

le processus gaussien réel sous-jacent étant donné par $X_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \Re e(B_1)$.

Tout système dynamique gaussien ergodique pouvant être représenté de cette manière, on supposera dorénavant que le système gaussien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$ est $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, \mu_0, T_\sigma)$ pour une certaine mesure de probabilité σ diffuse sur $[0,\pi]$.

2. Le rang un à tours plates

Rappelons que le système dynamique $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$est dit **rigide** lorsqu'il existe une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers tendant vers $+\infty$ telle que $T^{p_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Id}_\Omega$, i.e.

$$\forall A \in \mathcal{A}, \mu\left(T^{-p_n} A \Delta A\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Une propriété, plus forte que le rang un, lie la rigidité de T aux hauteurs des tours de Rokhlin de la définition du rang : le système dynamique $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$ est dit **de rang un à tours plates** si, pour toute partition finie $\mathcal{P}$ de Ω et toute suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs décroissant vers 0, on peut trouver une suite $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}} = \Big((h_n, F_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ de tours de Rokhlin telle que

i. la tour $\mathcal{T}_n$ est ε_n-fine pour $\mathcal{P}$,

ii. $T^{h_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Id}_\Omega$,

iii. $\mu(\mathcal{T}_n) \geq 1 - \varepsilon_n$.

La question de savoir si un système dynamique gaussien peut être de rang un à tours plates se pose naturellement, car toute rotation irrationnelle possède cette propriété. Or, la transformation T_σ de la trajectoire brownienne peut justement être obtenue comme une limite de rotations irrationnelles sur des fibres. De plus, lorsque S. Ferenczi a cru prouver qu'un certain gaussien-Kronecker était de rang un, il montrait en même temps que celui-ci était de rang un à tours plates. Pourtant, on va montrer le résultat suivant.

THÉORÈME 2.1: *Un système dynamique gaussien n'est jamais de rang un à tours plates.*

Preuve: On va supposer que la probabilité σ est telle que le système $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$ soit de rang un à tours plates, et en déduire une contradiction.

On notera dorénavant $Z_0 \stackrel{\text{déf}}{=} B_1$, et pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $Z_p \stackrel{\text{déf}}{=} Z_0 \circ T^p$. Puisque T est de rang un à tours plates, on peut trouver une suite $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}} = \Big((h_n, F_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ de tours de Rokhlin telle que

i. la tour $\mathcal{T}_n$ est $\frac{1}{n}$-fine pour le processus $\mathcal{Z} = (Z_p)_{p\in\mathbb{Z}}$,

ii. $T^{h_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Id}_\Omega$,

iii. $\mu(\mathcal{T}_n) \geq 1 - 1/n$.

Considérons le processus gaussien réel $\mathcal{X} = (X_p)_{p\in\mathbb{Z}} \stackrel{\text{déf}}{=} (\Re e Z_p)_{p\in\mathbb{Z}}$. Sa mesure spectrale est la probabilité γ définie par (4). On a donc

$$\mathbb{E}\left[X_0 X_{h_n}\right] = \int_{[0,\pi]} \cos(h_n t) d\sigma(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}\left[X_0^2\right] = 1.$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sigma\Big(\{t \in [0,\pi] \,/ \cos h_n t < 1 - \varepsilon\}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{5}$$

Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer d'après (5)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sigma\left(\bigcup_{k=0}^{[h_n/2]} J_k^n\right) \geq 1 - 2^{-n},$$

où

$$J_k^n \stackrel{\text{déf}}{=} \left[\frac{2k\pi}{h_n} - \frac{1}{h_n 2^n}, \frac{2k\pi}{h_n} + \frac{1}{h_n 2^n}\right].$$

D'où, en posant $p_n \stackrel{\text{déf}}{=} [h_n/2]$,

$$\sigma\left(\bigcup_{n\geq 2}\left(\bigcup_{k=0}^{p_n} J_k^n\right)^c\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Enfin, quitte à remplacer σ par une probabilité absolument continue par rapport à σ, ce qui revient à considérer un facteur gaussien de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$ qui conserve les mêmes propriétés de rang un et de rigidité (donc qui reste de rang un à tours plates), on peut supposer que σ est concentrée sur $\bigcap_{n\geq 2}\bigcup_{k=0}^{p_n} J_k^n$. On est alors naturellement amené à approcher σ par la probabilité atomique σ_n définie pour $n \geq 2$ par

$$\forall k \in \{0, \dots, p_n\}, \sigma_n\left(\left\{\frac{2k\pi}{h_n}\right\}\right) \overset{\text{déf}}{=} \sigma\left(J_k^n\right).$$

On note désormais pour tout $n \geq 2$, $T_n \overset{\text{déf}}{=} T_{\sigma_n}$, et on pose pour $s \in [0, 1]$

$$\psi(s) \overset{\text{déf}}{=} \inf\left\{x \in [0,\pi] / \sigma\left([0,x]\right) \geq s\right\}$$

et

$$\psi_n(s) \overset{\text{déf}}{=} \inf\left\{x \in [0,\pi] / \sigma_n\left([0,x]\right) \geq s\right\}.$$

On a pour tout $p \in \mathbb{Z}$

$$B_1 \circ T^p = \int_0^1 e^{ip\psi(s)} dB_s,$$

et

$$B_1 \circ T_n^p = \int_0^1 e^{ip\psi_n(s)} dB_s.$$

Considérons maintenant, pour $0 \leq p \leq 2h_n - 1$, la variable aléatoire

$$D_p^n \overset{\text{déf}}{=} B_1 \circ T^p - B_1 \circ T_n^p = \int_0^1 \left(e^{ip\psi(s)} - e^{ip\psi_n(s)}\right) dB_s.$$

Pour tout $s \in [0,1]$, on a

$$|\psi(s) - \psi_n(s)| \leq \frac{1}{h_n 2^n},$$

ce qui permet de majorer la variance de D_p^n

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|D_p^n\right|^2\right] &= 2\int_0^1 \left|e^{ip\psi(s)} - e^{ip\psi_n(s)}\right|^2 ds \\ &\leq 2\left(\frac{p}{h_n 2^n}\right)^2 \\ &\leq \frac{8}{2^{2n}}.\end{aligned}$$

On peut alors approcher $\mathcal{Z} = (Z_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ par $\mathcal{Z}^n = (Z_p^n)_{p\in\mathbb{Z}} \overset{\text{déf}}{=} (B_1 \circ T_n^p)_{p\in\mathbb{Z}}$. En effet, posons pour $n \geq 2$

$$M_n \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2h_n} \sum_{p=0}^{2h_n - 1} \left|D_p^n\right|^2 = \left\| \mathcal{Z}\big|_0^{2h_n} - \mathcal{Z}^n\big|_0^{2h_n} \right\|^2.$$

On a d'après l'inégalité précédente

$$\mathbb{E}[M_n] \leq \frac{8}{2^{2n}},$$

et donc

$$\mu\left(\left\| \mathcal{Z}|_0^{2h_n} - \mathcal{Z}^n|_0^{2h_n} \right\|^2 \geq \frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{8}{2^n}. \tag{6}$$

Soit maintenant $\omega_n \in F_n$, et posons $v_n \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{Z}|_0^{h_n}(\omega_n) \in \mathbb{C}^{h_n}$. Avec probabilité supérieure ou égale à $1 - 1/n$, il existe $j \in \{0, \dots, h_n - 1\}$ tel que $T^j\omega \in F_n$, et donc

$$\left\| \mathcal{Z}|_j^{j+h_n}(\omega) - v_n \right\| \leq \frac{1}{n}. \tag{7}$$

On déduit facilement de (6) et (7) que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour n assez grand, existe un entier

$$\mu\left(\bigcup_{j=0}^{h_n-1} \left(\left\| \mathcal{Z}^n|_j^{j+h_n} - v_n \right\| \leq \varepsilon \right) \right) \geq 1 - \varepsilon. \tag{8}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. On prend l'entier n assez grand pour que (8) soit réalisé, et pour être assuré grâce à (6) de pouvoir choisir ω_n dans F_n de telle sorte que

$$\left\| \mathcal{Z}^n|_0^{h_n}(\omega_n) - \mathcal{Z}|_0^{h_n}(\omega_n) \right\| = \left\| \mathcal{Z}^n|_0^{h_n}(\omega_n) - v_n \right\| \leq \varepsilon.$$

Pour $k \in \{0, \dots, p_n\}$, on pose $\alpha_k^n \overset{\text{déf}}{=} \frac{2k\pi}{h_n}$ et $m_k^n \overset{\text{déf}}{=} \sigma_n(\{\alpha_k^n\})$. Définissons aussi

$$R_k^n \overset{\text{déf}}{=} B_{m_0^n + \dots + m_k^n} - B_{m_0^n + \dots + m_{k-1}^n} \ (k \geq 1), \qquad \text{et} \qquad R_0^n \overset{\text{déf}}{=} B_{m_0^n}.$$

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a par définition de la transformation T_n

$$Z_p^n = B_1 \circ T_n^p = \sum_{k=0}^{p_n} R_k^n e^{ip\alpha_k^n},$$

d'où, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
&\left\| \mathcal{Z}^n|_0^{h_n}(\omega) - \mathcal{Z}^n|_0^{h_n}(\omega_n) \right\|^2 \\
&\quad = \frac{1}{h_n} \sum_{p=0}^{h_n-1} \left| Z_p^n(\omega) - Z_p^n(\omega_n) \right|^2 \\
&\quad = \frac{1}{h_n} \sum_{p=0}^{h_n-1} \left| \sum_{k=0}^{p_n} e^{ip\alpha_k^n} \left(R_k^n(\omega) - R_k^n(\omega_n) \right) \right|^2
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{h_n}\sum_{p=0}^{h_n-1}\left(\sum_{k=0}^{p_n} e^{ip\alpha_k^n}\left(R_k^n(\omega)-R_k^n(\omega_n)\right)\right)\left(\sum_{j=0}^{p_n} e^{-ip\alpha_j^n}\left(\overline{R_j^n(\omega)}-\overline{R_j^n(\omega_n)}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{p_n}\left|R_k^n(\omega)-R_k^n(\omega_n)\right|^2$$

$$+\sum_{k\neq j}\left(R_k^n(\omega)-R_k^n(\omega_n)\right)\left(\overline{R_j^n(\omega)}-\overline{R_j^n(\omega_n)}\right)\left(\frac{1}{h_n}\sum_{p=0}^{h_n-1} e^{ip(\alpha_k^n-\alpha_j^n)}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{p_n}\left|R_k^n(\omega)-R_k^n(\omega_n)\right|^2, \quad \text{car } e^{ih_n(\alpha_k^n-\alpha_j^n)}=1.$$

On a donc, dès que $\left\|\mathcal{Z}^n|_0^{h_n}(\omega)-v_n\right\|\leq\varepsilon$,

$$\sum_{k=0}^{p_n}\left|R_k^n(\omega)-R_k^n(\omega_n)\right|^2\leq 4\varepsilon^2,$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{p_n}\Big||R_k^n(\omega)|-|R_k^n(\omega_n)|\Big|^2\leq 4\varepsilon^2. \tag{9}$$

Mais comme $|R_k^n|$ est invariant par T_n, l'inégalité (9) a lieu dès qu'il existe un entier j tel que $\left\|\mathcal{Z}^n|_j^{j+h_n}-v_n\right\|\leq\varepsilon$, donc avec une probabilité supérieure ou égale à $1-\varepsilon$ d'après (8). Il existe donc une partie A de Ω, de mesure $\mu(A)\leq\varepsilon$, et des réels $c_k^n\stackrel{\text{déf}}{=}|R_k^n(\omega_n)|$ $(0\leq k\leq p_n)$ tels que, en dehors de A on ait

$$\sum_{k=0}^{p_n}\left(|R_k^n|-c_k^n\right)^2\leq 4\varepsilon^2. \tag{10}$$

On en déduit

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{p_n}\left(|R_k^n|-c_k^n\right)^2\right]\leq 4\varepsilon^2+\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A\sum_{k=0}^{p_n}\left(|R_k^n|-c_k^n\right)^2\right]$$
$$\leq 4\varepsilon^2+\|\mathbb{1}_A\|_{L^2(\mu)}\left(\left\|\sum_{k=0}^{p_n}|R_k^n|^2\right\|_{L^2(\mu)}+\sum_{k=0}^{p_n}(c_k^n)^2\right).$$

La mesure σ étant diffuse, on a

$$\sup_{0\leq k\leq p_n} m_k^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

une propriété classique du mouvement brownien donne alors

$$\sum_{k=0}^{p_n} |R_k^n|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2(\mu)} \mathbb{E}\left[B_1^2\right] = 2.$$

Pourvu que n ait été choisi assez grand, on a donc

$$\left\| \sum_{k=0}^{p_n} |R_k^n|^2 \right\|_{L^2(\mu)} \leq 3.$$

Puis, la convergence dans L^2 entraînant la convergence en probabilité, on peut aussi supposer

$$\mu\left(\sum_{k=0}^{p_n} |R_k^n|^2 > 3 \right) < 1 - \varepsilon,$$

ce qui assure que l'on ait pu prendre ω_n vérifiant aussi

$$\sum_{k=0}^{p_n} |R_k^n|^2 (\omega_n) = \sum_{k=0}^{p_n} (c_k^n)^2 \leq 3.$$

Comme $\|\mathbb{1}_A\|_{L^2(\mu)} \leq \varepsilon^{1/2}$, on obtient alors

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{p_n} \left(|R_k^n| - c_k^n \right)^2 \right] \leq 4\varepsilon^2 + 6\varepsilon^{1/2}. \tag{11}$$

Posons maintenant

$$\lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{E}\left[|B_1|^2 \right] - \mathbb{E}\Big[|B_1| \Big]^2.$$

On a $\lambda > 0$ car $|B_1|$ n'est pas constant, et on vérifie que pour tout réel c

$$\mathbb{E}\left[\Big(|B_1| - c \Big)^2 \right] \geq \lambda.$$

Or, pour tout $k \in \{0, \dots, p_n\}$, R_k^n a même loi que $\sqrt{m_k^n} B_1$, et on a donc en vertu de ce qui précède

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{p_n} \left(|R_k^n| - c_k^n \right)^2 \right] \geq \lambda \left(m_0^n + \cdots + m_{p_n}^n \right) = \lambda.$$

En utilisant (11), on en déduit

$$\lambda \leq 4\varepsilon^2 + 6\varepsilon^{1/2}.$$

Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on obtient la contradiction annoncée. ∎

3. Le rang un local

Cette partie est consacrée à la preuve du théorème 1.1. Une des principales difficultés concernant le rang un local tient dans le problème suivant : comment déduire de ce qui se passe sur un ensemble de mesure $\tau \in]0,1[$ une propriété "globale" de l'espace, c'est à dire vérifiée sur Ω éventuellement privé d'une partie de faible probabilité ? L'objet du paragraphe suivant est de fournir un outil permettant de traiter ce problème.

3.1 PROBABILITÉS À DENSITÉ LOG-CONCAVE. Une application $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est dite **log-concave** si pour tous $x, y \in \mathbb{R}^p$ et tout $\theta \in [0,1]$, on a l'inégalité

$$f\Big(\theta x + (1-\theta)y\Big) \geq f(x)^\theta f(y)^{1-\theta}.$$

Si m est une probabilité sur $\mathbb{R}^p$ dont la densité (sous-entendu par rapport à la mesure de Lebesgue) est log-concave, un très joli théorème dû à Prékopa ([10]) dit que si A et B sont deux boréliens de $\mathbb{R}^p$ et $\theta \in [0,1]$, on a l'inégalité

$$m\Big(\theta A + (1-\theta)B\Big) \geq m(A)^\theta m(B)^{1-\theta},$$

où $\theta A + (1-\theta)B \stackrel{\text{déf}}{=} \{\theta x + (1-\theta)y \,/ x \in A \text{ et } y \in B\}$ est supposé aussi mesurable.

LEMME 3.1: *Soient $0 < \tau < 1-\delta < 1$. Il existe $M = M(\tau,\delta)$ tel que, pour tout entier $p \geq 1$, pour toute probabilité m à densité log-concave sur $\mathbb{R}^p$, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ et tout $r > 0$,*

$$m\Big(B(x,r)\Big) \geq \tau \quad \Longrightarrow \quad m\Big(B(x,Mr)\Big) \geq 1-\delta,$$

où $B(x,r)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon r pour une norme quelconque $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^p$.

Preuve: Soit m une probabilité à densité log-concave sur $\mathbb{R}^p$, et supposons $m\Big(B(0,1)\Big) \geq \tau$. Posons $A \stackrel{\text{déf}}{=} B(0,1)$, et remarquons que pour tout borélien B de $\mathbb{R}^p$ et tout $\theta \in]0,1[$, $\theta A + (1-\theta)B$ est ouvert, donc mesurable. Si de plus $\frac{1}{2} \leq \theta \leq \frac{3}{4}$, on a

$$m\Big(\theta A + (1-\theta)B\Big) \geq m(A)^\theta m(B)^{1-\theta} \geq \tau^{3/4} m(B)^{1/2},$$

et donc

$$m(B) \leq \left(\frac{m\Big(\theta A + (1-\theta)B\Big)}{\tau^{3/4}}\right)^2. \tag{12}$$

Définissons maintenant pour tout entier $n \geq 1$

$$B_n \stackrel{\text{déf}}{=} \{y \in \mathbb{R}^p \,/ n \leq \|y\| < n+1\}.$$

Par l'inégalité triangulaire, on montre que

$$\theta A + (1-\theta)B_n \subset C_{n,\theta}, \tag{13}$$

où

$$C_{n,\theta} \stackrel{\text{déf}}{=} \{y \in \mathbb{R}^p \,/ (1-\theta)n - 1 < \|y\| < (1-\theta)n + 2\}.$$

Or, on peut trouver $\theta_1, \ldots, \theta_{[n/12]}$ dans $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ tels que les C_{n,θ_i} $(1 \leq i \leq [n/12])$ soient deux à deux disjoints. Comme m est une mesure de probabilité, il existe au moins un i tel que

$$m\left(C_{n,\theta_i}\right) \leq \frac{1}{[n/12]}. \tag{14}$$

De (12), (13) et (14), on déduit

$$m(B_n) \leq u_n \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\tau^{3/2}[n/12]^2}.$$

Or, la série de terme général u_n est convergente. Soit $M = M(\tau, \delta) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n \geq M} u_n < \delta,$$

on a alors $m\left(\bigcup_{n \geq M} B_n\right) < \delta$, i.e. $m\Big(B(0, M)\Big) \geq 1 - \delta$.

Dans le cas où $m\Big(B(x,r)\Big) \geq \tau$, on considère la mesure image m' de m par $y \longmapsto (y-x)/r$, à laquelle on peut appliquer ce qui précède. On obtient $m'\Big(B(0,M)\Big) \geq 1-\delta$, i.e. $m\Big(B(x, Mr)\Big) \geq 1 - \delta$. ∎

3.2 LE RANG UN LOCAL À TOURS PLATES. Le lemme 3.1 permet d'obtenir un énoncé plus fort que le théorème 2.1.

THÉORÈME 3.2: *Soit $\mathcal{Y} = (Y_p)_{p \in \mathbb{Z}} = (Y_0 \circ T^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ un processus dans $L^2(\mu)$ qui engendre la tribu $\mathcal{A}$, et $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tendant vers 0. Il ne peut pas exister une suite de tours de Rokhlin $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}} = \Big((h_n, F_n)\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant*

i. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, la tour $\mathcal{T}_n$ est ε_n-fine pour $\mathcal{Y}$,*
ii. $T^{h_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{Id}_\Omega$,

iii. $\tau \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(\mathcal{T}_n) > 0$.

Preuve: Supposons qu'une telle suite de tours existe. Puisque $\mathcal{Y}$ engendre $\mathcal{A}$, on peut aussi trouver une suite de tours vérifiant des propriétés similaires pour le processus $\mathcal{Z}$ introduit dans la preuve du théorème 2.1. On reprend alors le même raisonnement, le résultat intermédiaire (8) devenant cette fois :

pour tout $\varepsilon > 0$ et pour n assez grand,

$$(8') \qquad \mu\left(\bigcup_{j=0}^{h_n-1}\left(\left\|\mathcal{Z}^n\big|_j^{j+h_n} - v_n\right\| \le \varepsilon\right)\right) \ge \tau/2.$$

On en déduit de même qu'avec probabilité supérieure ou égale à $\tau/2$, on a

$$\sum_{k=0}^{p_n}\left(|R_k^n| - c_k^n\right)^2 \le 4\varepsilon^2.$$

Or, la loi m de $(R_0^n, \dots, R_{p_n}^n)$ dans $\mathbb{R}^{p_n+1}$ a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$\frac{dm}{dr}(r_0,\dots,r_{p_n}) = \frac{r_0\cdots r_{p_n}}{m_0^n\cdots m_{p_n}^n}\mathbb{1}_{(r_0\ge 0,\dots,r_{p_n}\ge 0)}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r_0^2}{m_0^n}+\cdots+\frac{r_{p_n}^2}{m_{p_n}^n}\right)\right].$$

Cette densité est log-concave (comme produit de fonctions log-concaves), et le lemme 3.1 permet alors d'écrire

$$\mu\left(\sum_{k=0}^{p_n}\left(|R_k^n| - c_k^n\right)^2 \le 4M(\delta,\tau/2)\varepsilon^2\right) \ge 1-\delta.$$

Comme ε et δ peuvent être choisis aussi petits que l'on veut, on aboutit à la même contradiction. ∎

3.3 Quelques lemmes. On n'aura plus besoin maintenant du mouvement brownien, et on se référera uniquement au processus gaussien réel $\mathcal{X} = (X_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ qui engendre le système dynamique gaussien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$. En particulier, on dira qu'une tour de Rokhlin est ε-fine si elle est ε-fine pour $\mathcal{X}$. On utilisera souvent dans la suite le lemme qui vient, qui peut être vu comme une conséquence immédiate du lemme 3.1, mais dont on peut aussi trouver une preuve directe élémentaire.

LEMME 3.3: *Pour tout $\tau \in]0,1[$, il existe une application $h_\tau : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow [0,1]$, avec $h_\tau(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1$, telle que pour toute variable gaussienne réelle Y,*

$$\mu\Big(|Y| \leq \varepsilon\Big) \geq \tau \Longrightarrow \mu\Big(|Y| \leq \sqrt{\varepsilon}\Big) \geq h_\tau(\varepsilon).$$

Ce lemme trouve une première application dans la preuve du résultat suivant.

LEMME 3.4: *Soit $\tau \in]0,1[$. Il existe une application $s_\tau : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, avec $s_\tau(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, vérifiant la propriété suivante :*

Si $\mathcal{T} = (h, F)$ est une tour de Rokhlin ε-fine de hauteur $h \geq 20$, de mesure $\mu(\mathcal{T}) \geq \tau$, si ω_0 et ω_0' sont deux points de F, k et k' deux entiers dans $\{0, \dots, [h/4]\}$ tels que

$$\left\| \mathcal{X}|_k^{k+[h/4]}(\omega_0) - \mathcal{X}|_{k'}^{k'+[h/4]}(\omega_0') \right\| \leq \varepsilon, \tag{15}$$

alors

$$\left\| \mathcal{X}|_k^{k+[3h/4]}(\omega_0) - \mathcal{X}|_{k'}^{k'+[3h/4]}(\omega_0') \right\| \leq s_\tau(\varepsilon).$$

Preuve: Notons que l'inégalité $h \geq 20$ permet d'écrire $[h/4] \geq h/5$ et $[3h/4] \geq h/2$. La tour $\mathcal{T}$ étant ε-fine, on vérifie facilement que pour $\omega, \omega' \in F$ et $j \in \{0, \dots, h-1-[h/4]\}$,

$$\left\| \mathcal{X}|_j^{j+[h/4]}(\omega) - \mathcal{X}|_j^{j+[h/4]}(\omega') \right\| \leq \sqrt{5}\varepsilon. \tag{16}$$

De même, si $0 \leq j \leq h-1-[3h/4]$, on a

$$\left\| \mathcal{X}|_j^{j+[3h/4]}(\omega) - \mathcal{X}|_j^{j+[3h/4]}(\omega') \right\| \leq \sqrt{2}\varepsilon. \tag{17}$$

Puis, l'hypothèse (15) étant réalisée, on obtient en utilisant (16) et l'inégalité triangulaire, pour tout $\omega \in F$

$$\left\| \mathcal{X}|_k^{k+[h/4]}(\omega) - \mathcal{X}|_{k'}^{k'+[h/4]}(\omega') \right\| \leq \left(2\sqrt{5}+1\right)\varepsilon \leq 6\varepsilon.$$

Considérons maintenent la variable gaussienne réelle $Y \overset{\text{déf}}{=} X_0 - X_{k'-k}$, et soit $U \overset{\text{déf}}{=} \bigcup_{j=k}^{k+[h/4]-1} T^j F$. On a

$$\begin{aligned}
\int_U Y^2 d\mu &= \sum_{j=k}^{k+[h/4]-1} \int_{T^j F} Y^2 d\mu \\
&= \sum_{j=k}^{k+[h/4]-1} \int_F (X_j - X_{j+k'-k})^2 d\mu \\
&= [h/4] \int_F \left\| \mathcal{X}|_k^{k+[h/4]} - \mathcal{X}|_{k'}^{k'+[h/4]} \right\|^2 d\mu \\
&\leq 36\,\varepsilon^2 \mu(U),
\end{aligned}$$

d'où

$$\mu\Big(U \cap \left(Y^2 \geq 81\varepsilon^2\right)\Big) \leq \frac{4}{9}\mu(U),$$

et donc

$$\mu\Big(|Y| \leq 9\varepsilon\Big) \geq \frac{1}{2}\mu(U) \geq \frac{\tau}{10}.$$

Le lemme 3.3 permet alors d'en déduire

$$\mu\Big(|Y| \leq 3\varepsilon^{1/2}\Big) \geq h_{\tau/10}(9\varepsilon). \tag{18}$$

Puis, en utilisant la majoration du moment d'ordre 4 de Y :

$$\mathbb{E}\left[Y^4\right] \leq 16\mathbb{E}\left[X_0^4\right] < +\infty,$$

on déduit de (18) par Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Y^2\right] &\leq 9\,\varepsilon + \int_{|Y|>3\,\varepsilon^{1/2}} Y^2 d\mu \\
&\leq 9\,\varepsilon + 4\sqrt{\mathbb{E}\left[X_0^4\right]}\sqrt{1-h_{\tau/10}(9\,\varepsilon)}\,. \qquad (19)
\end{aligned}$$

Posons $V \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{j=k}^{k+[3h/4]-1} T^j F$. Comme $\mu(V) \geq \tau/2$, on a

$$\frac{1}{\mu(F)}\int_F \left\| \mathcal{X}|_k^{k+[3h/4]} - \mathcal{X}|_{k'}^{k'+[3h/4]} \right\|^2 d\mu = \frac{1}{\mu(V)}\int_V Y^2 d\mu \leq \frac{2}{\tau}\mathbb{E}\left[Y^2\right].$$

Il existe donc au moins un $\omega \in F$ tel que

$$\left\| \mathcal{X}|_k^{k+[3h/4]}(\omega) - \mathcal{X}|_{k'}^{k'+[3h/4]}(\omega) \right\| \leq \sqrt{\frac{2}{\tau}\mathbb{E}\left[Y^2\right]}\,.$$

En appliquant deux fois (17) et (19), on obtient alors

$$\left\| \mathcal{X}|_k^{k+[3h/4]}(\omega_0) - \mathcal{X}|_{k'}^{k'+[3h/4]}(\omega_0') \right\| \leq 2\sqrt{2}\varepsilon + \sqrt{\frac{2}{\tau}\mathbb{E}\left[Y^2\right]} \leq s_\tau(\varepsilon),$$

avec

$$s_\tau(\varepsilon) \stackrel{\text{déf}}{=} 2\sqrt{2}\varepsilon + \sqrt{\frac{2}{\tau}\left(9\varepsilon + 4\sqrt{\mathbb{E}\left[X_0^4\right]}\sqrt{1-h_{\tau/10}(9\varepsilon)}\right)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \qquad \blacksquare$$

LEMME 3.5: *Il ne peut pas exister θ et τ dans $]0,1[$ vérifiant la propriété suivante :*

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une tour de Rokhlin ε-fine $\mathcal{T} = (h, F)$, de mesure $\mu(\mathcal{T}) \geq \tau$, et deux entiers k et l tels que *i.* $0 \leq k < k+l \leq h-1$,

ii. $l \geq \theta h$,

iii. *pour tout* $\omega \in F$, $\left\| \mathcal{X}|_k^{k+l}(\omega) - \mathcal{X}|_h^{h+l}(\omega) \right\| \leq \varepsilon$.

Preuve: Supposons par l'absurde l'existence de θ et τ vérifiant cette propriété. Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs décroissant vers 0. Pour tout n, on trouve alors une tour de Rokhlin $\mathcal{T} = (h_n, F_n)$, ε_n-fine, de mesure supérieure ou égale à τ, et des entiers k_n et l_n tels que

i. $0 \leq k_n < k_n + l_n \leq h_n - 1$,

ii. $l_n \geq \theta h_n$,

iii. pour tout $\omega \in F_n$, $\left\| \mathcal{X}|_{k_n}^{k_n+l_n}(\omega) - \mathcal{X}|_{h_n}^{h_n+l_n}(\omega) \right\| \leq \varepsilon_n$.

Posons $h'_n \overset{\text{déf}}{=} h_n - k_n \geq l_n \geq \theta h_n$, et $Y_n \overset{\text{déf}}{=} X_0 - X_{h'_n}$. On définit aussi $U_n \overset{\text{déf}}{=} \bigcup_{j=k_n}^{k_n+l_n-1} T^j F_n$. Comme dans la preuve du lemme précédent, on montre que

$$\int_{U_n} Y_n^2 d\mu \leq \mu(U_n)\varepsilon_n^2,$$

d'où l'on déduit

$$\mu(Y_n^2 \leq 4\varepsilon_n^2) \geq \frac{3}{4}\mu(U_n) \geq \frac{3}{4}\theta\tau.$$

Puis, par le lemme 3.3, on obtient

$$\mu\left(|Y_n| \leq \sqrt{2\varepsilon_n}\right) \geq h_{3\theta\tau/4}(2\varepsilon_n).$$

Ainsi, $\mathbb{E}\left[Y_n^2\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, i.e. $X_{h'_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2(\mu)} X_0$. Comme $\mathcal{X}$ engendre $\mathcal{A}$, on en déduit $T^{h'_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Id}_\Omega$. Considérons alors la tour $\mathcal{T}'_n \overset{\text{déf}}{=} (h'_n, F_n)$: elle est $\varepsilon_n/\sqrt{\theta}$-fine, et de mesure $\mu(\mathcal{T}'_n) \geq \theta\tau$. Comme $\varepsilon_n/\sqrt{\theta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on obtient une contradiction avec le théorème 3.2. ∎

3.4 Des tours de plus en plus hautes.

Lemme 3.6: *Il existe des applications*

$$\begin{aligned} \varphi &: \ ]0,1[\longrightarrow]0,1[\\ g &: \ \mathbb{R}_+^* \times]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ m &: \ ]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

avec, pour tout $\tau \in]0,1[$, $g(\varepsilon,\tau) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, *et qui vérifient :*

Pour toute tour de Rokhlin $\mathcal{T} = (h, F)$ ε-fine, de hauteur $h \geq 48$ et de mesure $\mu(\mathcal{T}) \geq \tau$, il existe une partie F' de F, de mesure $\mu(F') \geq \varphi(\tau)\mu(F)$, telle que

$$\forall \omega, \omega' \in F', \quad \left\| \mathcal{X}|_0^{[5h/4]-2}(\omega) - \mathcal{X}|_0^{[5h/4]-2}(\omega') \right\| \leq g(\varepsilon, \tau).$$

Si de plus $\varepsilon \leq m(\tau)$, F' est la base d'une tour de Rokhlin de hauteur $h' \geq 9h/8$, et qui est $2g(\varepsilon, \tau)$-fine.

Preuve: Soit $\mathcal{T} = (h, F)$ une tour de Rokhlin ε-fine et de mesure supérieure ou égale à τ. On définit deux sous-tours de $\mathcal{T}$: $\mathcal{D} \stackrel{\text{déf}}{=} ([h/4], F)$ et $\mathcal{M} \stackrel{\text{déf}}{=} ([h/4], T^{[h/2]}F)$. Ces deux tours sont de mesure au moins $\tau/5$, et sont $\sqrt{5}\varepsilon$-fines.

Soit $p = p(\tau) \geq 5$ assez grand pour que $(1 - \tau/5)^p < \tau/10$. On considère p copies $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i, T_i)$ $(0 \leq i \leq p)$ du système $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$, et on note $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ le produit de ces p systèmes. Pour $1 \leq i \leq p$, on considère le processus gaussien $\mathcal{X}_i = (X_{i,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ défini sur Ω_i, correspondant à $\mathcal{X}$ sur Ω. Puis, sur $\tilde{\Omega}$, on définit $\tilde{\mathcal{X}} = (\tilde{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ par

$$\tilde{X}_k \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{i=1}^{p} X_{i,k}.$$

On vérifie aisément que le processus $\tilde{X}$ a même loi que $\mathcal{X}$et les $\mathcal{X}_i$. Ainsi, si $\tilde{\mathcal{F}}$ est la sous-tribu de $\tilde{\mathcal{A}}$ engendrée par $\tilde{\mathcal{X}}$, le système dynamique $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ est isomorphe à $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$.

Si A est un objet (partie de Ω ou tour de Rokhlin) défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$, on notera A_i l'objet qui lui correspond dans $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i, T_i)$, et $\tilde{A}$ dans $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$. Si $A_i \in \mathcal{A}_i$, on définit aussi

$$\widehat{A_i} \stackrel{\text{déf}}{=} \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_p.$$

D'après les hypothèses posées sur la tour $\mathcal{T}$, on a

$$\tilde{\mu}(\tilde{\mathcal{D}}) \geq \tau/5, \quad \text{et} \quad \tilde{\mu}\left[\left(\bigcup_{i=1}^{p} \widehat{\mathcal{M}_i}\right)^c\right] < \tau/10,$$

et donc

$$\tilde{\mu}\left[\tilde{\mathcal{D}} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{p} \widehat{\mathcal{M}_i}\right)\right] \geq \tau/10.$$

Notons que $\tilde{\mu}(\tilde{\mathcal{D}} \cap \widehat{\mathcal{M}_i})$ ne dépend pas de i ; on peut donc en déduire

$$\tilde{\mu}(\tilde{\mathcal{D}} \cap \widehat{\mathcal{M}_1}) \geq \frac{\tau}{10p}.$$

On peut donc trouver un étage $E_1 = T_1^k F_1$ de $\mathcal{M}_1$ tel que

$$\tilde{\mu}(\tilde{\mathcal{D}} \cap \widehat{E_1}) \geq \frac{\tau}{10p}\tilde{\mu}(\widehat{E_1}) = \frac{\tau}{10p}\mu_1(E_1).$$

Puis, il existe $(\omega_2, \ldots, \omega_p) \in \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_p$ tel que

$$\mu_1\left(\left\{\omega_1 \in E_1 \Big/ (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p) \in \tilde{\mathcal{D}}\right\}\right) \geq \frac{\tau}{10p}\mu_1(E_1) = \frac{\tau}{10p}\mu_1(F_1).$$

On pose alors

$$\varphi(\tau) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\tau}{10p(\tau)},$$

et

$$F_1' \stackrel{\text{déf}}{=} T_1^{-k}\left\{\omega_1 \in E_1 \Big/ (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p) \in \tilde{\mathcal{D}}\right\} \subset F_1.$$

On a bien $\mu_1(F_1') \geq \varphi(\tau)\mu_1(F_1)$. Soient ω_1 et ω_1' dans $T_1^k F_1'$; on a

$$\left\| \mathcal{X}_1\Big|_0^{[h/4]}(\omega_1) - \mathcal{X}_1\Big|_0^{[h/4]}(\omega_1') \right\| \leq \sqrt{5}\varepsilon,$$

d'où

$$\left\| \tilde{\mathcal{X}}\Big|_0^{[h/4]}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p) - \tilde{\mathcal{X}}\Big|_0^{[h/4]}(\omega_1', \omega_2, \ldots, \omega_p) \right\| \leq \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{p}}\varepsilon \leq \varepsilon.$$

Mais comme $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p)$ et $(\omega_1', \omega_2, \ldots, \omega_p)$ sont dans $\tilde{\mathcal{D}}$, le lemme 3.4 nous donne

$$\left\| \tilde{\mathcal{X}}\Big|_0^{[3h/4]}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p) - \tilde{\mathcal{X}}\Big|_0^{[3h/4]}(\omega_1', \omega_2, \ldots, \omega_p) \right\| \leq s_\tau(\varepsilon),$$

puis

$$\left\| \mathcal{X}_1\Big|_0^{[3h/4]}(\omega_1) - \mathcal{X}_1\Big|_0^{[3h/4]}(\omega_1') \right\| \leq \sqrt{p}s_\tau(\varepsilon).$$

Si maintenant ω_1 et ω_1' sont dans F_1', puisque $k \geq [h/2] \geq h/4$, on a

$$\left\| \mathcal{X}_1\Big|_0^{k}(\omega_1) - \mathcal{X}_1\Big|_0^{k}(\omega_1') \right\| \leq 2\varepsilon$$

$$\text{et} \quad \left\| \mathcal{X}_1\Big|_k^{k+[3h/4]}(\omega_1) - \mathcal{X}_1\Big|_k^{k+[3h/4]}(\omega_1') \right\| \leq \sqrt{p}s_\tau(\varepsilon).$$

D'où, comme $k + [3h/4] \geq [5h/4] - 2$,

$$\left\| \mathcal{X}_1\Big|_0^{[5h/4]-2}(\omega_1) - \mathcal{X}_1\Big|_0^{[5h/4]-2}(\omega_1') \right\| \leq g(\tau, \varepsilon) \tag{20}$$

$$\text{avec} \qquad g(\tau, \varepsilon) \stackrel{\text{déf}}{=} 4\varepsilon + 2\sqrt{p}s_\tau(\varepsilon).$$

Prouvons maintenant que, à τ fixé, dès que ε est assez petit, F' est la base d'une tour de Rokhlin de hauteur $h' \geq 9h/8$. Si ce n'est pas le cas, on peut trouver j dans $\{h, \ldots, [9h/8]\}$ tel que

$$T^j F' \cap F' \neq \emptyset. \tag{21}$$

Prenons le plus petit j vérifiant (21). On dispose alors d'une tour de Rokhlin (j, F') dont la hauteur j est au moins h, et de mesure supérieure ou égale à $\tau\varphi(\tau)$. Fixons $\omega_0 \in T^j F' \cap F'$. Pour tout $\omega \in F'$, on a

$$\begin{aligned}\left\| \mathcal{X}|_0^{[h/16]}(\omega) - \mathcal{X}|_j^{j+[h/16]}(\omega) \right\| \leq & \left\| \mathcal{X}|_0^{[h/16]}(\omega) - \mathcal{X}|_0^{[h/16]}(\omega_0) \right\| \\ & + \left\| \mathcal{X}|_0^{[h/16]}(\omega_0) - \mathcal{X}|_j^{j+[h/16]}(\omega) \right\|.\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{T}$ est ε-fine, le premier terme est majoré par $\sqrt{h/[h/16]}\varepsilon$. Pour le second, remarquons que $[5h/4] - 2 \geq [9h/8] + [h/16] \geq j + [h/16]$ car $h \geq 48$. On a donc d'après (20)

$$\begin{aligned}\left\| \mathcal{X}|_0^{[h/16]}(\omega_0) - \mathcal{X}|_j^{j+[h/16]}(\omega) \right\| = & \left\| \mathcal{X}|_j^{j+[h/16]}(T^{-j}\omega_0) - \mathcal{X}|_j^{j+[h/16]}(\omega) \right\| \\ \leq & \sqrt{\frac{[5h/4]-2}{[h/16]}} g(\varepsilon, \tau).\end{aligned}$$

Si cela était possible pour ε arbitrairement petit, on pourrait donc rendre $\left\| \mathcal{X}|_0^{[h/16]}(\omega) - \mathcal{X}|_j^{j+[h/16]}(\omega) \right\|$ aussi petit que l'on veut, ce qui serait contradictoire avec le lemme 3.5. Il existe donc $m(\tau)$ tel que, si $\varepsilon \leq m(\tau)$, F' est la base d'une tour de Rokhlin de hauteur h', où h' est le plus petit entier supérieur ou égal à $9h/8$. De plus, grâce à (20), cette tour est clairement $2g(\varepsilon, \tau)$-fine. ∎

LEMME 3.7: *Il existe des applications*

$$\begin{aligned} \Phi &: \ ]0,1[\longrightarrow]0,1[\\ G &: \ \mathbb{R}_+^* \times]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ M &: \ ]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

avec, pour tout $\tau \in]0,1[$, $G(\varepsilon,\tau) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$, *et qui vérifient :*

Pour toute tour de Rokhlin $\mathcal{T} = (h, F)$ ε-fine, de hauteur $h \geq 48$ et de mesure $\mu(\mathcal{T}) \geq \tau$ avec $\varepsilon \leq M(\tau)$, il existe une tour de Rokhlin (h', F') qui est $G(\varepsilon, \tau)$-fine, où *i.* $F' \subset F$, $\mu(F') \geq \Phi(\tau)\mu(F)$,

ii. $h' \geq h + h/\tau$.

Preuve: Posons $\varphi_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi$ et $g_1 \stackrel{\text{déf}}{=} g$, φ et g étant définies dans le lemme précédent. Puis, par récurrence, pour tout $k \geq 2$, soit

$$\begin{aligned} \varphi_k \quad &: \quad \tau \longmapsto \varphi_{k-1}(\tau)\varphi\Big(\tau\varphi_{k-1}(\tau)\Big) \\ g_k \quad &: \quad (\varepsilon,\tau) \longmapsto g\Big(2g_{k-1}(\varepsilon,\tau), \tau\varphi_{k-1}(\tau)\Big) \end{aligned}$$

On choisit aussi $m_k(\tau) \in]0, m(\tau)]$ assez petit pour que

$$\varepsilon \leq m_k(\tau) \Longrightarrow \forall j \in \{1,\ldots,k-1\}, 2g_j(\varepsilon,\tau) \leq m\Big(\tau\varphi_j(\tau)\Big).$$

En utilisant le lemme 3.6, on montre facilement par récurrence que pour tout entier $k \geq 1$, pour toute tour de Rokhlin $\mathcal{T} = (h, F)$ ε-fine, de mesure $\mu(\mathcal{T}) \geq \tau$, de hauteur $h \geq 48$ et avec $\varepsilon \leq m_k(\tau)$, on peut trouver une tour de Rokhlin (h_k, F_k) de base $F_k \subset F$ avec $\mu(F_k) \geq \varphi_k(\tau)\mu(F)$, de hauteur $h_k \geq (9/8)^k h$, cette tour étant $2g_k(\varepsilon,\tau)$-fine.

Il suffit alors de choisir $n = n(\tau)$ assez grand pour que $(9/8)^n \geq 1 + 1/\tau$, et de poser $\Phi(\tau) \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi_{n(\tau)}(\tau)$, $G(\varepsilon,\tau) \stackrel{\text{déf}}{=} 2g_{n(\tau)}(\varepsilon,\tau)$, et $M(\tau) \stackrel{\text{déf}}{=} m_{n(\tau)}(\tau)$. ∎

3.5 Les systèmes gaussiens ne sont jamais de rang un local.

Supposons par l'absurde que le système dynamique gaussien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$ soit de rang un local. Il existe donc $\tau \in]0,1[$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, on puisse trouver une tour de Rokhlin $\mathcal{T}_\varepsilon = (h_\varepsilon, F_\varepsilon)$ ε-fine et de mesure supérieure ou égale à τ. (Remarquons qu'alors, on a nécessairement $h_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} +\infty$.) Fixons $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $h_\varepsilon \geq 48$ et $\varepsilon \leq M(\tau/2)$; notons pour simplifier $(h, F) \stackrel{\text{déf}}{=} (h_\varepsilon, F_\varepsilon)$. On définit pour $\omega \in F$

$$n_F(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \min\left\{k \geq 1 \,/ T^k\omega \in F\right\}.$$

On a $n_F \geq h$, et par le théorème de Kac (voir par exemple [9] p. 46), on sait que $\int_F n_F d\mu = 1$. Par conséquent, si on pose

$$F_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \{\omega \in F \,/ n_F(\omega) < 2h/\tau\},$$

on a $\mu(F_1) \geq \mu(F)/2$. Appliquons maintenant le lemme 3.7 à la tour de Rokhlin (h, F_1) qui est ε-fine et de mesure au moins $\tau/2$: il existe une tour de Rokhlin

(h', F') qui est $G(\varepsilon, \tau/2)$-fine, avec $F' \subset F_1$, $\mu(F') \geq \Phi(\tau/2)\mu(F_1)$, et de hauteur $h' \geq 2h/\tau + h$. Remarquons que l'on a

$$1 \geq h'\mu(F') \geq \frac{1}{2}h'\Phi(\tau/2)\mu(F) \geq \frac{h'}{2h}\tau\Phi(\tau/2),$$

d'où

$$\frac{h'}{h} \leq \frac{2}{\tau\Phi(\tau/2)}.$$

Fixons $\omega_0 \in F'$, et soit $k \overset{\text{déf}}{=} n_F(\omega_0) < 2h/\tau$. Comme $\mathcal{T}$est ε-fine, on a

$$\left\| \mathcal{X}|_0^h(\omega_0) - \mathcal{X}|_k^{k+h}(\omega_0) \right\| \leq \varepsilon.$$

Puis, pour tout $\omega \in F'$, la tour (h', F') étant $G(\varepsilon, \tau/2)$-fine, on a

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{X}|_0^h(\omega) - \mathcal{X}|_k^{k+h}(\omega) \right\| \\ &\leq \left\| \mathcal{X}|_0^h(\omega) - \mathcal{X}|_0^h(\omega_0) \right\| + \left\| \mathcal{X}|_0^h(\omega_0) - \mathcal{X}|_k^{k+h}(\omega_0) \right\| \\ &\quad + \left\| \mathcal{X}|_k^{k+h}(\omega_0) - \mathcal{X}|_k^{k+h}(\omega) \right\| \\ &\leq \varepsilon + 2\sqrt{\frac{h'}{h}} G(\varepsilon, \tau/2) \\ &\leq \varepsilon + 2\sqrt{\frac{2}{\tau\Phi(\tau/2)}} G(\varepsilon, \tau/2). \end{aligned}$$

Or, la tour de Rokhlin (k, F') est toujours de mesure au moins $\Phi(\tau/2)\tau/2$, on a $h/k \geq h/h' \geq \Phi(\tau/2)\tau/2$ et ε peut être choisi arbitrairement petit : on obtient donc à nouveau une contradiction avec le lemme 3.5. Ceci achève la preuve du théorème 1.1. ∎

References

[1] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin and Ya. G. Sinai, *Ergodic Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[2] S. Ferenczi, *Systèmes localement de rang un*, Annales de l'Institut Henri Poincaré. Probabilités et Statistiques **20** (1984), 35–51.

[3] S. Ferenczi, *Systèmes de rang fini*, Thèse de Doctorat d'État, Université d'Aix-Marseille 2, 1990.

[4] S. Ferenczi and M. Lemańczyk, *Rank is not a spectral invariant*, Studia Mathematica **98** (1991), 227–230.

[5] C. Foias and S. Stratila, *Ensembles de Kronecker dans la théorie ergodique*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Série I **20** (1967), 166–168.

[6] A. Iwanik and J. De Sam Lazaro, *Sur la multiplicité L^p d'un automorphisme gaussien*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Série I **312** (1991), 875–876.

[7] J. King, *The commutant is the weak closure of the powers, for rank-1 transformations*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **6** (1986), 363–384.

[8] J. L. King, *Joining-rank and the structure of finite-rank mixing transformations*, Journal d'Analyse Mathématique **51** (1988), 182–227.

[9] K. Petersen, *Ergodic Theory*, Cambridge University Press, 1983.

[10] A. Prékopa, *Logarithmic concave measures with application to stochastic programming*, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) **32** (1971), 302–316.

[11] T. de la Rue, *Entropie d'un système dynamique gaussien : Cas d'une action de $\mathbb{Z}^d$*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Série I **317** (1993), 191–194.

[12] T. de la Rue, *Mouvement moyen et système dynamique gaussien*, Probability Theory and Related Fields **102** (1995), 45–56.

[13] T. de la Rue, *Systèmes dynamiques gaussiens d'entropie nulle, lâchement et non lâchement Bernoulli*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **16** (1996), 1–26.

[14] J. P. Thouvenot, *The metrical structure of some gaussian Processes*, in *Ergodic Theory and Related Topics II*, Teubner Texte zur Mathematik, Georgenthal, 1986, pp. 195–198.